



Открытый дистанционный интеллектуально-творческий марафон «МАРС: миссия выполнима» Номинация «РАЗ ЗАДАЧА, ДВА ЗАДАЧА...»

Решения задачи для 10-11 классов

1. (1 балл) В конце XIX века известный французский астроном и популяризатор науки Камиль Фламарион в книге "Живописная астрономия", рассказывая о Марсе, отметил: "Южное полушарие планеты мы знаем гораздо лучше, чем северное". Почему во времена Фламариона так было и как решили проблему современные астрономы?

Решение. Во времена Фламариона (вторая половина XIX века) Марс наблюдали только с Земли, в телескопы. Ось и орбита Марса ориентированы таким образом, что во время великих противостояний к Солнцу (и Земле) обращено преимущественно южное полушарие (0,5). Современные астрономы изучают Марс при помощи космических аппаратов. (0,5)

2. (2 балла) Какова может быть предельная высота гор на Земле и Марсе? Будем считать, что гора состоит из гранита, плотность которого $\rho=2700 \text{ кг/м}^3$, а предел прочности $\sigma = 10^8 \text{ Па}$.

Решение. Гора имеет коническую форму, её масса $m=\rho Sh/3$ (1). Давление у основания $p=mg/S= \rho gh/3$ не должно превышать предел прочности породы σ . Отсюда наибольшая высота горы $h=3\sigma/\rho g$. Подставив численные данные, получим для Земли примерно 11 км, для Марса 30 км (1). Ответ хорошо согласуется с реальными высотами Эвереста и Олимпа.

3. (3 балла) Атмосферное давление на Марсе "на уровне моря" составляет 636 Па (в среднем). Во сколько раз давление в самой глубокой впадине Марса - равнине Эллада (глубина 7 км ниже среднего уровня) больше давления на вершине горы Олимп (высота 27 км)? Изменением температуры газа с высотой пренебречь.

Решение. Изменение давления изотермической атмосферы с высотой описывается барометрической формулой $p=p_0 e^{(-\mu g(h-h_0)/RT)}$, где p_0 – давление на высоте h_0 , μ – молярная масса атмосферного газа, R – универсальная газовая постоянная и T – абсолютная температура. Отношение двух давлений равно $e^{(-\mu g(h_1-h_2)/RT)}$ (1,5). Приняв температуру изотермической атмосферы равной средней температуре на планете (210 К) (0,5), молярную массу равной молярной массе углекислого газа (0,044 кг/моль)(0,5), получаем различие давлений примерно в 24 раза (0,5).

4. (4 балла) Вычислите (из термодинамических соображений) среднюю температуру Марса в перигелии и афелии. Известны солнечная постоянная для Земли (1367 Вт/м^2) и все необходимые сведения о Марсе и его орбите.

Решение. Запишем уравнение теплового баланса для планеты: $(1-A) \cdot E_m = 4 \cdot \sigma \cdot T^4$, где A – альbedo Марса, E_m – значение солнечной постоянной в данной точке орбиты, σ – постоянная Стефана-Больцмана (1,5).

Значение солнечной постоянной в перигелии и афелии орбиты можно найти, используя обратно-квадратичную зависимость от расстояния: $E_m = E_3/a_m(1 \pm e)^2$. В перигелии она равна 716 Вт/м^2 , в афелии – 492 Вт/м^2 . (1,5)

После подстановки численных данных в формулу получаем, что температура в афелии равна 207 К , в перигелии 228 К (-66 и -45°С соответственно) (1).

5. (5 баллов) Известный энтузиаст пилотируемой космонавтики Илья Масков планирует организовать экспедицию на Марс. Оцените её стоимость, если стоимость одного «килограмма» космического корабля равна стоимости 10 г золота. Массу корабля оцените через уравнение Циолковского ($v = u \ln \frac{M_0}{M}$, где $u \approx 3,5 \text{ км/с}$ – скорость истечения газов из сопла ракеты, M_0 – начальная масса ракеты, M – конечная масса ракеты, v – скорость, которую приобретёт ракета). Считайте, что космический корабль летит по наименее энергозатратной траектории. Масса полезной нагрузки корабля составляет 10 тонн .

Решение. Решение задачи разбивается на 4 этапа.

Этап первый, подготовительный. Расчёт параметров орбиты.

$$\text{Большая полуось } a = \frac{a_m + a_3}{2} = \frac{1.52 + 1.00}{2} = 1.26 \text{ а. е.}$$

$$\text{Эксцентриситет } e = \frac{a - a_p}{a} = \frac{1.26 - 1.00}{1.26} = 0.205$$

$$\text{Афелийная скорость } v_a = \sqrt{\frac{GM}{a} \frac{1-e}{1+e}} = 22.2 \text{ км/с}$$

$$\text{Перигелийная скорость } v_p = \sqrt{\frac{GM}{a} \frac{1+e}{1-e}} = 33.6 \text{ км/с}$$

$$\text{Орбитальная скорость Земли } v_3 = 29.8 \text{ км/с}$$

$$\text{Орбитальная скорость Марса } v_m = \sqrt{\frac{GM}{a_m}} = 24.2 \text{ км/с}$$

Этап второй. Рассчитаем суммарный «запас» скорости корабля.

При старте с Земли космический корабль должен преодолеть земное притяжение, а также перейти на нужную орбиту со скоростью $\Delta v_p = v_p - v_3 = 3.8 \text{ км/с}$

Таким образом, он должен обладать начальной скоростью v_1 :

$$\frac{mv_1^2}{2} = \frac{GM_3m}{R_3} + \frac{m\Delta v_p^2}{2}$$

$$\text{Отсюда } v_1 = \sqrt{v_{3||}^2 + \Delta v_p^2} = \sqrt{11.2^2 + 3.8^2} \approx 11.8 \text{ км/с}$$

Однако при старте выгодно корабль будет обладать уже начальной скоростью орбитального вращения Земли, равно примерно 0.4 км/с. Поэтому $v'_1 = 11.8 - 0.4 = 11.4$ км/с. Космический корабль должен будет обладать данной скоростью для того, чтобы покинуть земное притяжение и выйти на нужную орбиту.

При подлёте к Марсу скорость космического корабля будет 22.2 км/с, а орбитальная скорость Марса 24.2 км/с.

$$\Delta v_a = v_a - v_m = -2.0 \text{ км/с}$$

При посадке на Марс придется включить двигатель корабля второй раз, чтобы погасить скорость, полученную в гравитационном поле Марса. Тогда

$$\frac{mv_2^2}{2} + \frac{m\Delta v_a^2}{2} = \frac{GM_m m}{R_m}$$

$$\text{Отсюда } v_2 = \sqrt{v_{M||}^2 - \Delta v_a^2} = \sqrt{5.8^2 - 2.0^2} = 5.5 \text{ км/с}$$

Также учтём скорость осевого вращения Марса (примерно 0.2 км/с). Тогда $v'_2 = 5.5 - 0.2 = 5.3$ км/с

В итоге мы получаем, что кораблю нужно будет включить двигатель дважды: первый раз при старте с Земли и второй раз при посадке на Марс. Суммарная скорость, которую должен суметь развить корабль, будет $v' = v'_1 + v'_2 = 11.4 + 5.3 = 16.7$ км/с.

Третий этап. Применяем формулу Циолковского и находим массу корабля.

$$M_0 = M_n \exp \frac{v'}{u} = 10 \text{ тонн} \cdot \exp \frac{16.7}{3.5} = 1200 \text{ тонн}.$$

Четвёртый этап. Расчёт стоимости корабля.

Если суммарная масса корабля составляет 1200 тонн, значит, стоимость данной экспедиции будет равна стоимости 12 тонн золота.

$$\text{Стоимость 1 кг золота составляет } 1750\$ \cdot \frac{1000}{31} = 56.5 \cdot 10^3 \$$$

$$\text{Отсюда стоимость всей экспедиции составит } 56.5 \cdot 10^3 \frac{\$}{\text{кг}} \cdot 12 \cdot 10^3 \text{ кг} \approx 680 \text{ млн } \$ \approx 700 \text{ млн } \$.$$

Ответ: стоимость экспедиции составит 700 млн \$.

Примечание. Об обратном пути Илья Масков как-то не подумал...

(За первый и второй этап решения - до трёх баллов, за третий и четвёртый – по одному баллу).